

Vecteurs de l'espace



Comment montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

Il faut établir une relation du type $\vec{u} = \alpha \vec{v}$ avec α réel

Conséquences : $\odot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow A, B$ et C alignés
 $\odot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow (AB)$ et (CD) parallèles

Comment montrer que trois points A, B et C définissent un plan unique :

Il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Comment montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :

Il faut trouver deux réels α et β tel que par exemple $\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$

Quelles formules faut-il utiliser en géométrie analytique :

Avec $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, α et β deux réels, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$

cui
cui
cui



On a : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \alpha \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix} = \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$

Si $I = m[AB]$ alors $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

Égalité : $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

Comment montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires :

Il faut trouver un réel α tel que $\vec{u} = \alpha \vec{v}$

C'est-à-dire tel que : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ qui équivaut à $\begin{cases} x = \alpha x' \\ y = \alpha y' \\ z = \alpha z' \end{cases}$

exemple : soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \vec{u} = \alpha \vec{v}$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} / \begin{cases} 2 = \alpha \\ 6 = 3\alpha \\ -4 = 2\alpha \end{cases} : \text{impossible}$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.



Comment montrer que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :

Il faut trouver deux réels α et β tel que par exemple $\vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$

C'est-à-dire tel que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$$

Le problème revient alors à résoudre le système $\begin{cases} x = \alpha x' + \beta x'' \\ y = \alpha y' + \beta y'' \\ z = \alpha z' + \beta z'' \end{cases}$ d'inconnues α et β



rappel : comment résoudre un système de trois équations à deux inconnues α et β :

- ☺ déterminer si possible α et β à partir de deux équations
- ☺ puis remplacer les valeurs trouvées dans la troisième équation pour vérification

exemple : soit $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 / \vec{u} = \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}$



facile !

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} 2 = \alpha + \beta \\ 8 = -\alpha + \beta \\ -1 = 2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 5 \\ -1 = -1 : \text{vrai} \end{cases}$$

donc $\vec{u} = -3\vec{v} + 5\vec{w} \Rightarrow \vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires